La conjecture de Toeplitz

ou

le problème du carré inscrit.

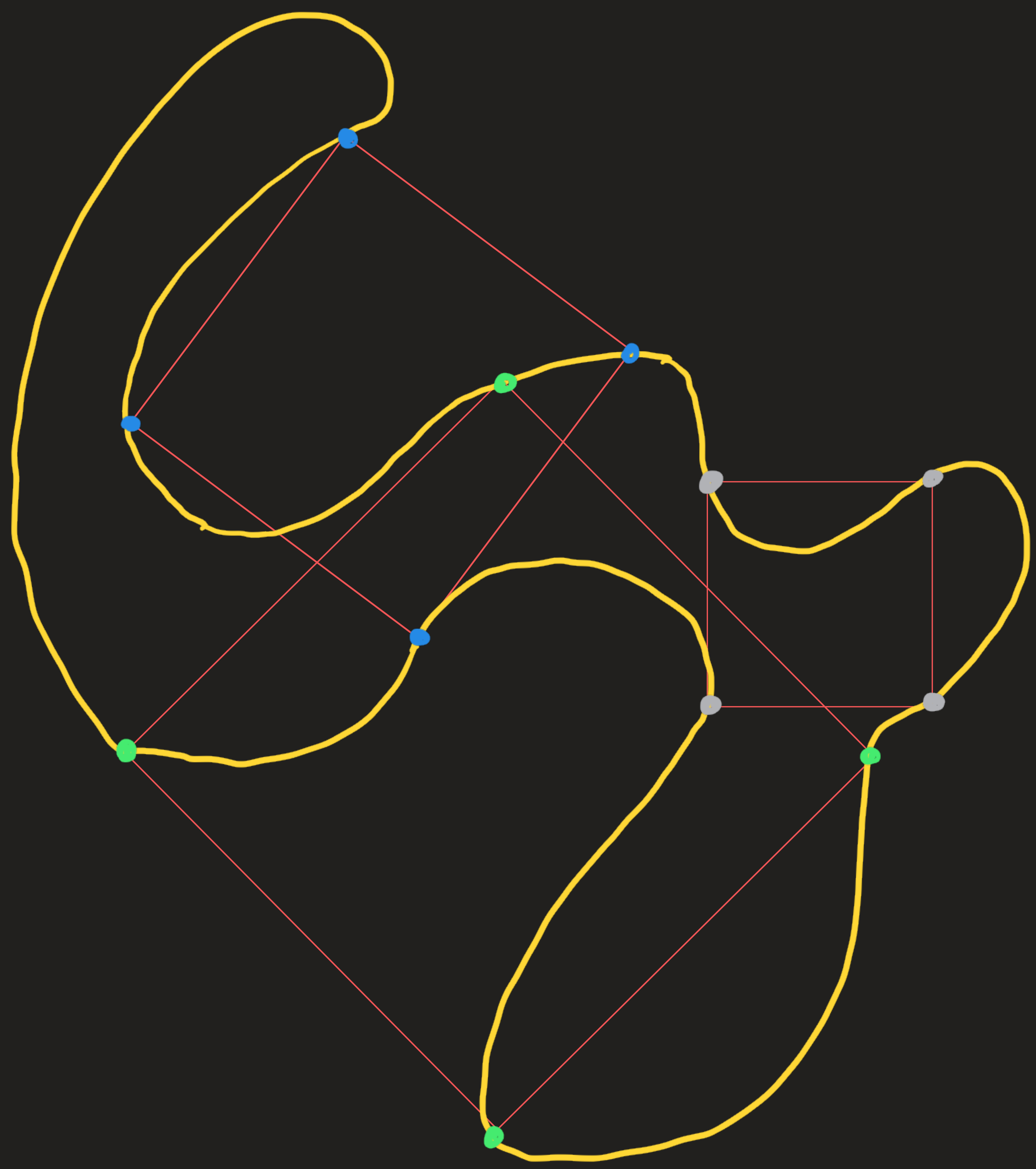
Otto Toeplitz

1911

Conjecture : Etant donnée une courbe de Jordan. Existe-t-il quatre points de cette courbe qui sont les sommets d'un carré ?

Courbe simple

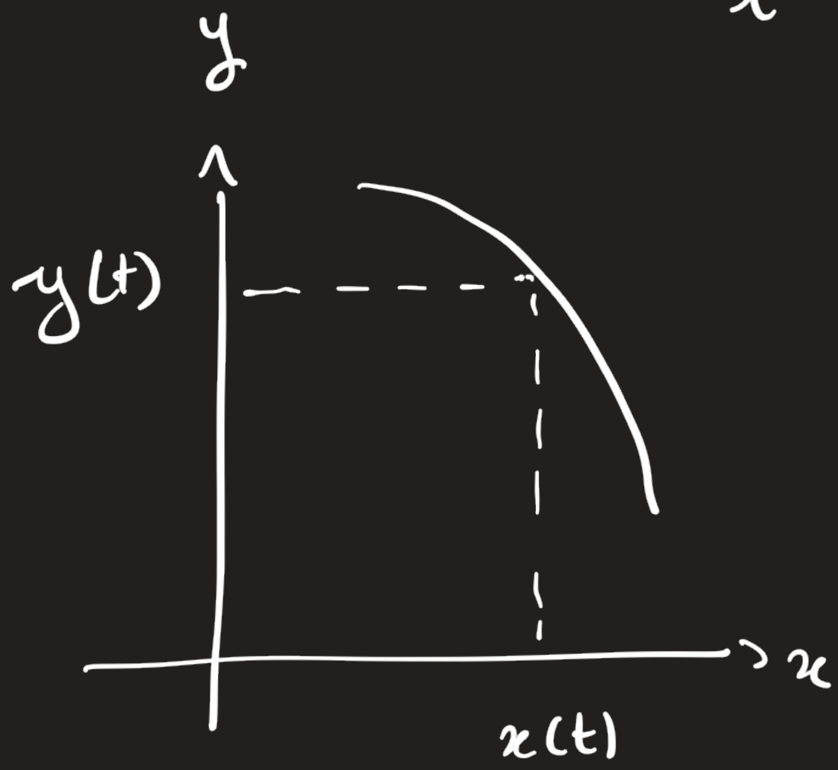
fermée



Camille Jordan

Courbe de Jordan.

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto (x(t), y(t))$$



- $t \mapsto x(t)$
  $t \mapsto y(t)$ continues.

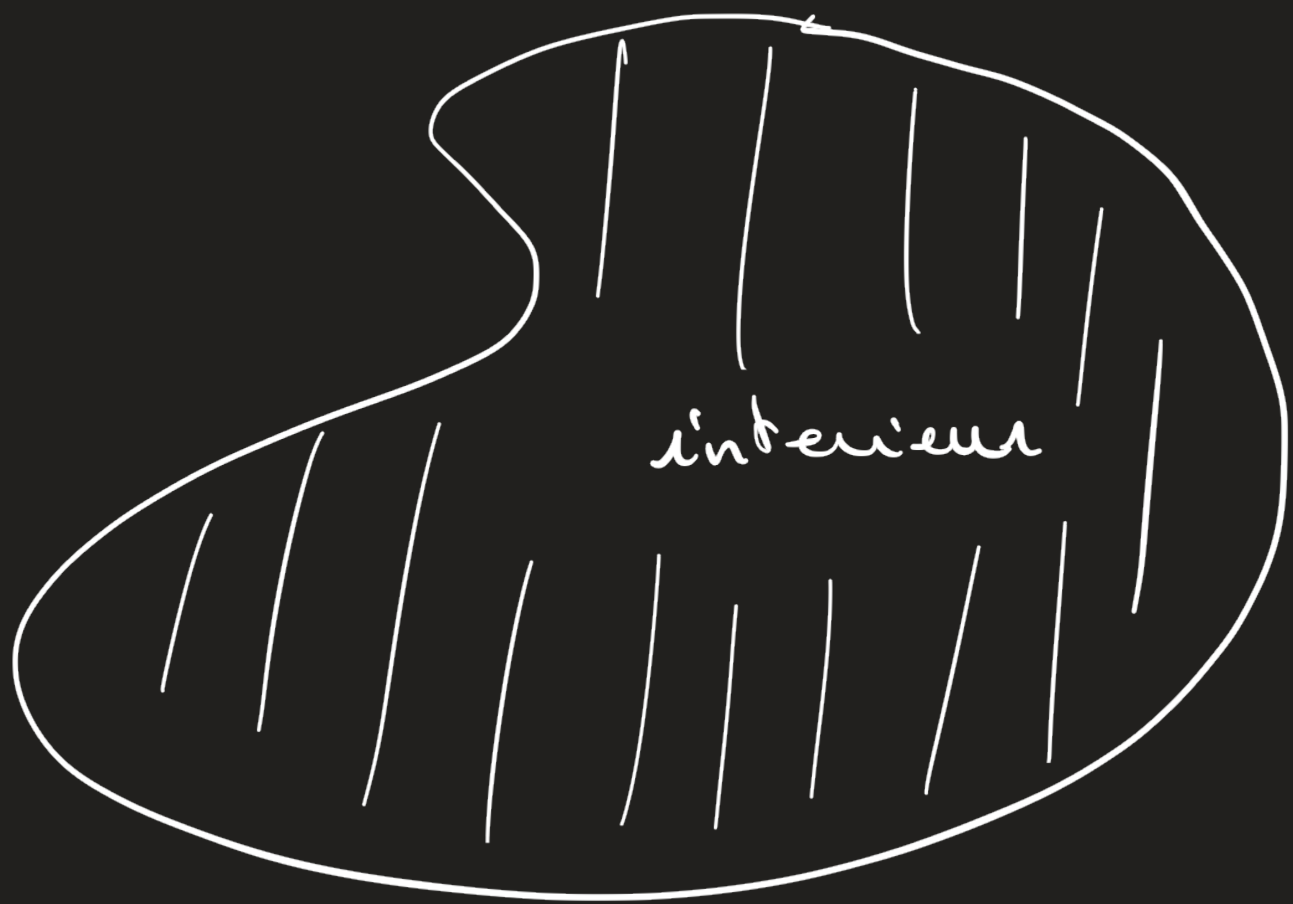
- $x(0) = x(1)$
  $y(0) = y(1)$

- Si $\gamma(t) = \gamma(t')$ alors $t = t'$

γ est injective.

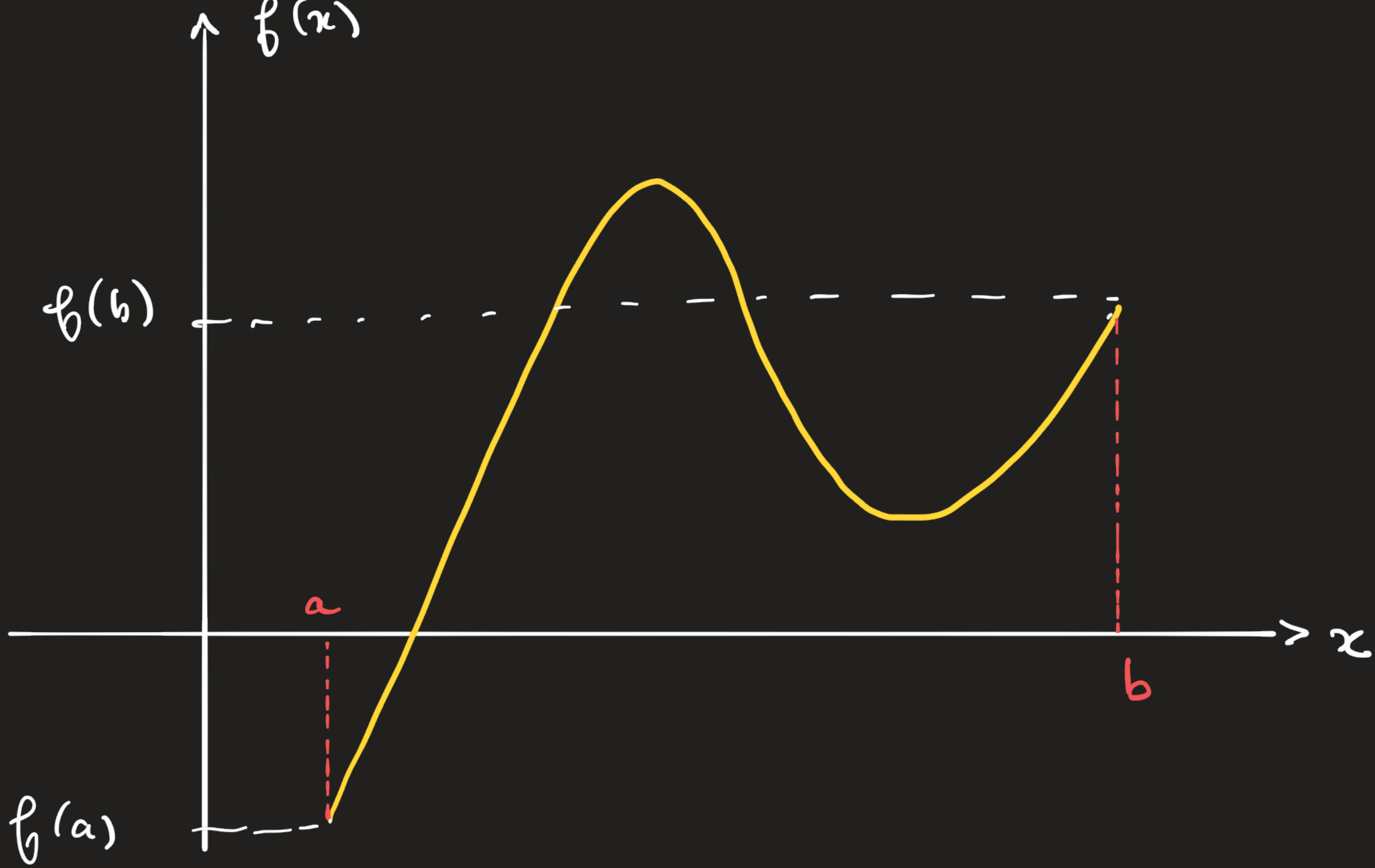
Théorème de Jordan.

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$



exterieur.

Théorème des valeurs intermédiaires.



les rationnels

$r + r'$

$r \cdot r'$

$\frac{r}{r'}$

$r + (-r) = 0$

$r \times \frac{1}{r} = 1$

$r \leq r'$

les réels

$x + x'$

$x \cdot x'$

$\frac{x}{x'}$

$x + (-x') = 0$

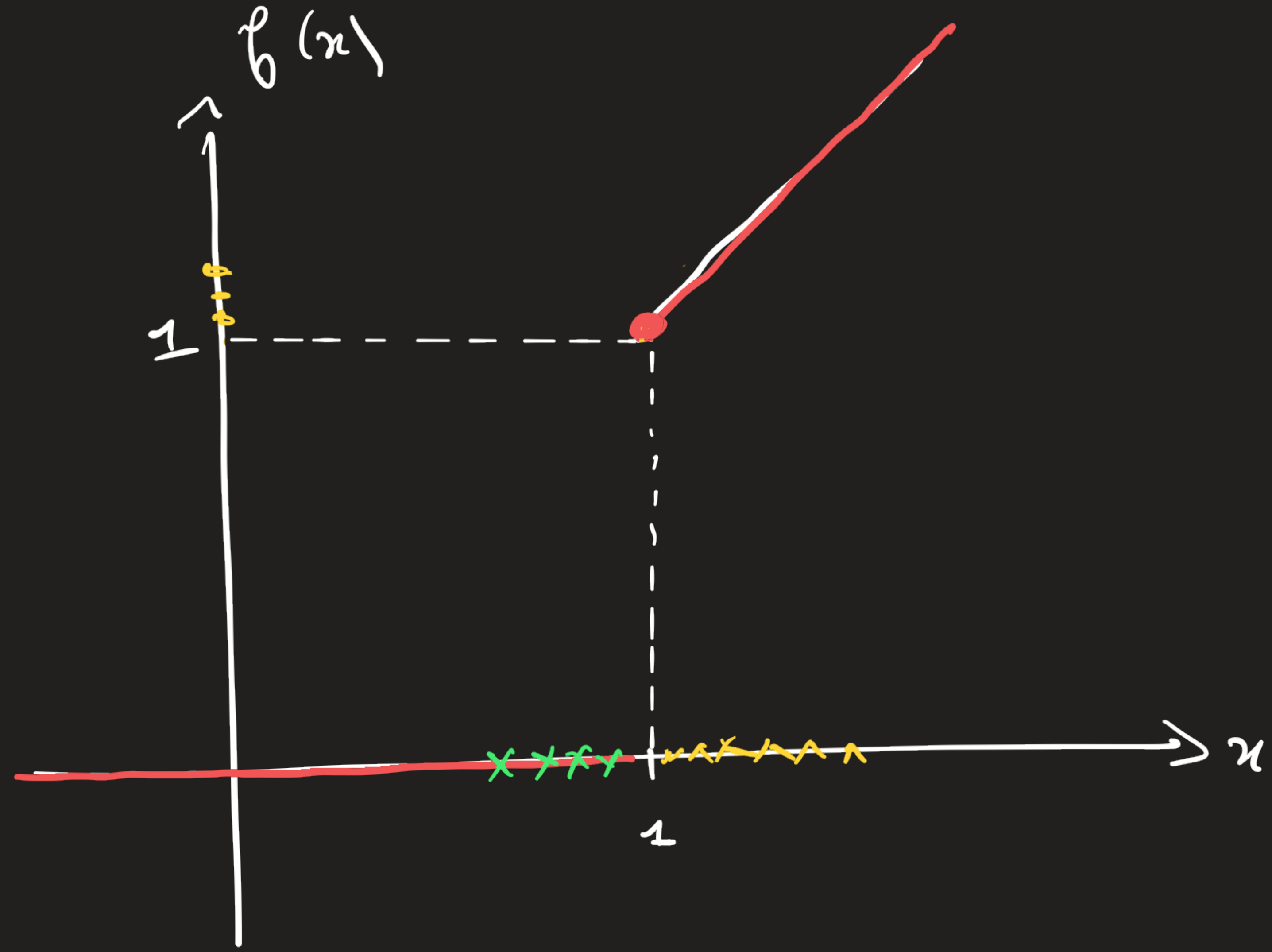
$x \times \frac{1}{x} = 1$

$x \leq x'$

- la propriété de la borne supérieure.

La continuité

f est continue en a si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ $\lim x_n = a$ alors $(f(x_n))_{n\geq 0}$ tend vers $f(a)$


f(x)
1
1
x

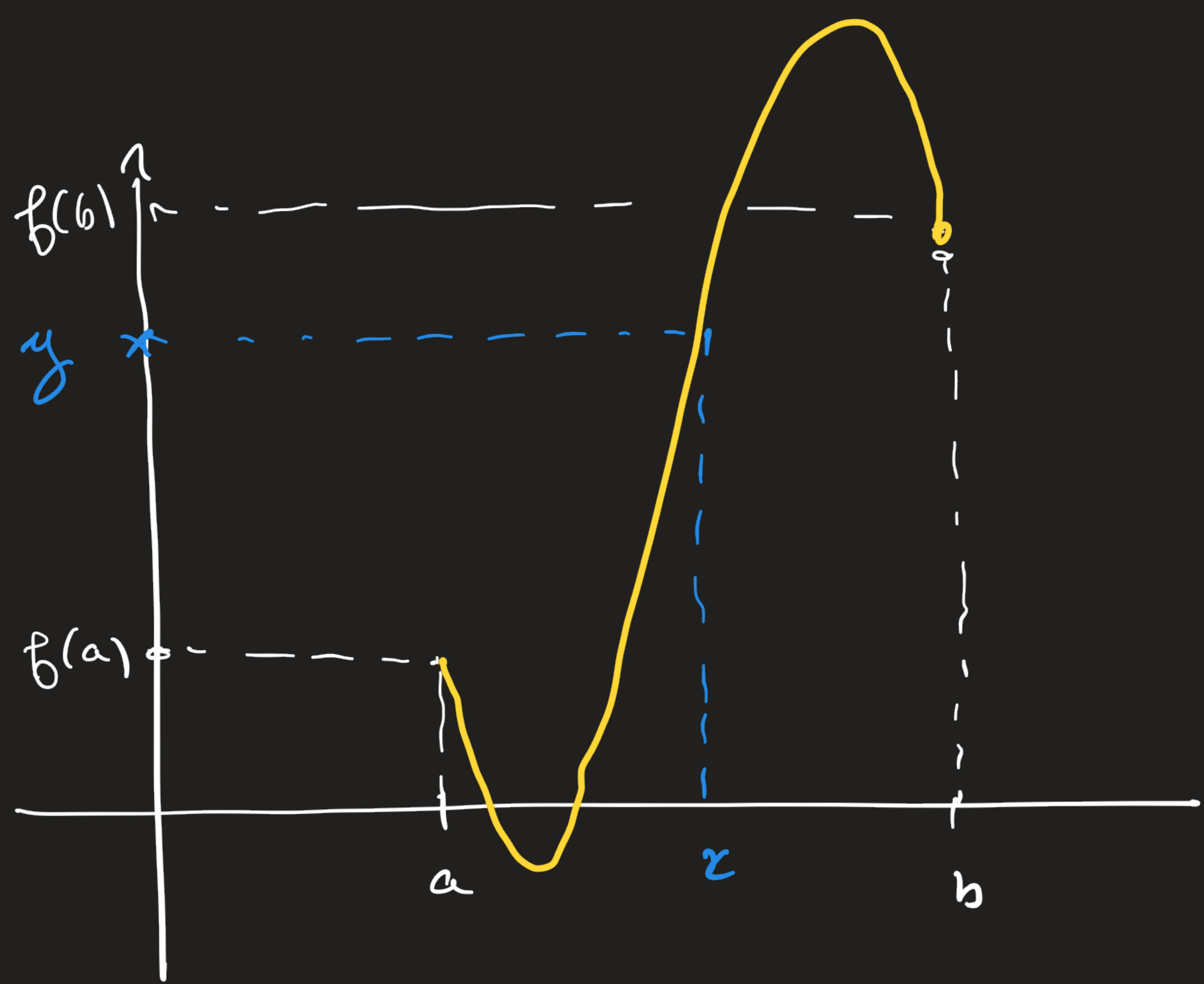
Théorème (des valeurs intermédiaires)

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue

alors pour tout y entre

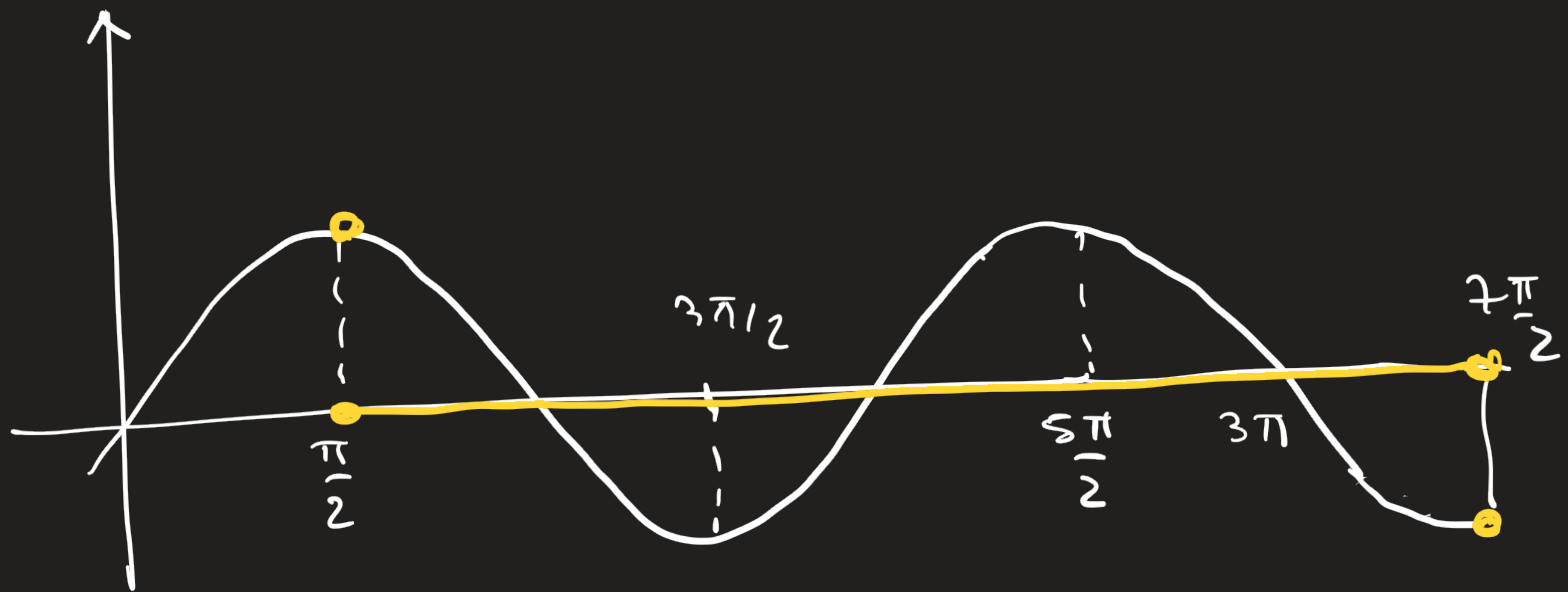
$f(a)$ et $f(b)$ il existe $x \in [a,b]$

tel que $f(x) = y$.



f(b)
y
f(a)
a
x
b

fonction sinus sur $[\pi/2, 7\pi/2]$



Exemple :

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$x \longmapsto x^2 - 2$$

$$x = \frac{a}{b} \qquad f(x) = \frac{a^2 - 2b^2}{b^2} \in \mathbb{Q}$$

$$f(0) = -2 \qquad f(2) = 2$$

Mais $f(x) \neq 0$ pour $x \in \mathbb{Q}$

Propriété de la borne supérieure

$A \subset \mathbb{R}$ $\quad$ $A \neq \emptyset$

A a un majorant M

Alors il existe un "plus petit majorant" noté sup A.

$A = [0, 1[$ $\quad$ $M = 2$ est un majorant

$\sup A = 1$ est le plus petit majorant

$\mathbb{Q}$

$$A = \{ r \in \mathbb{Q} \quad r^2 < 2 \}$$

$$A = \mathbb{Q} \cap]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$$

$\sup A = \sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$ OK

Dans $\mathbb{Q}$ A n'a pas de borne sup.

Théorème (de la limite monotone).

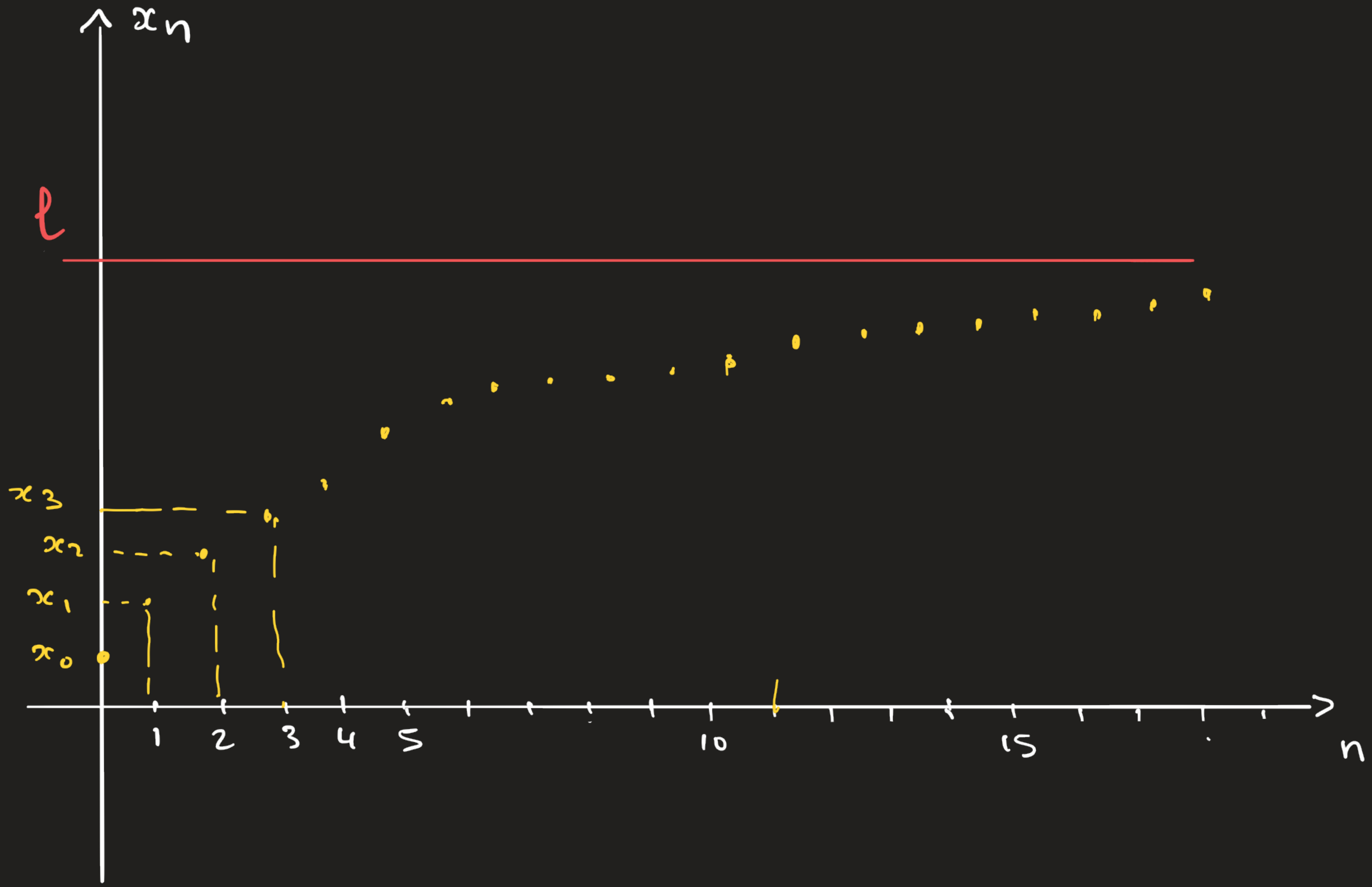
$(x_n)_{n \geq 0}$ $\quad x_{n+1} \geq x_n$

et $(x_n)_{n \geq 0}$ majorée alors

la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge.

$$A = \{ x_n \ : \ n = 0, 1, 2, \dots \} \subset \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \sup A.$$



x_n
ℓ
x_3
x_2
x_1
x_0
1
2
3
4
5
10
15
n

Suites récurrentes

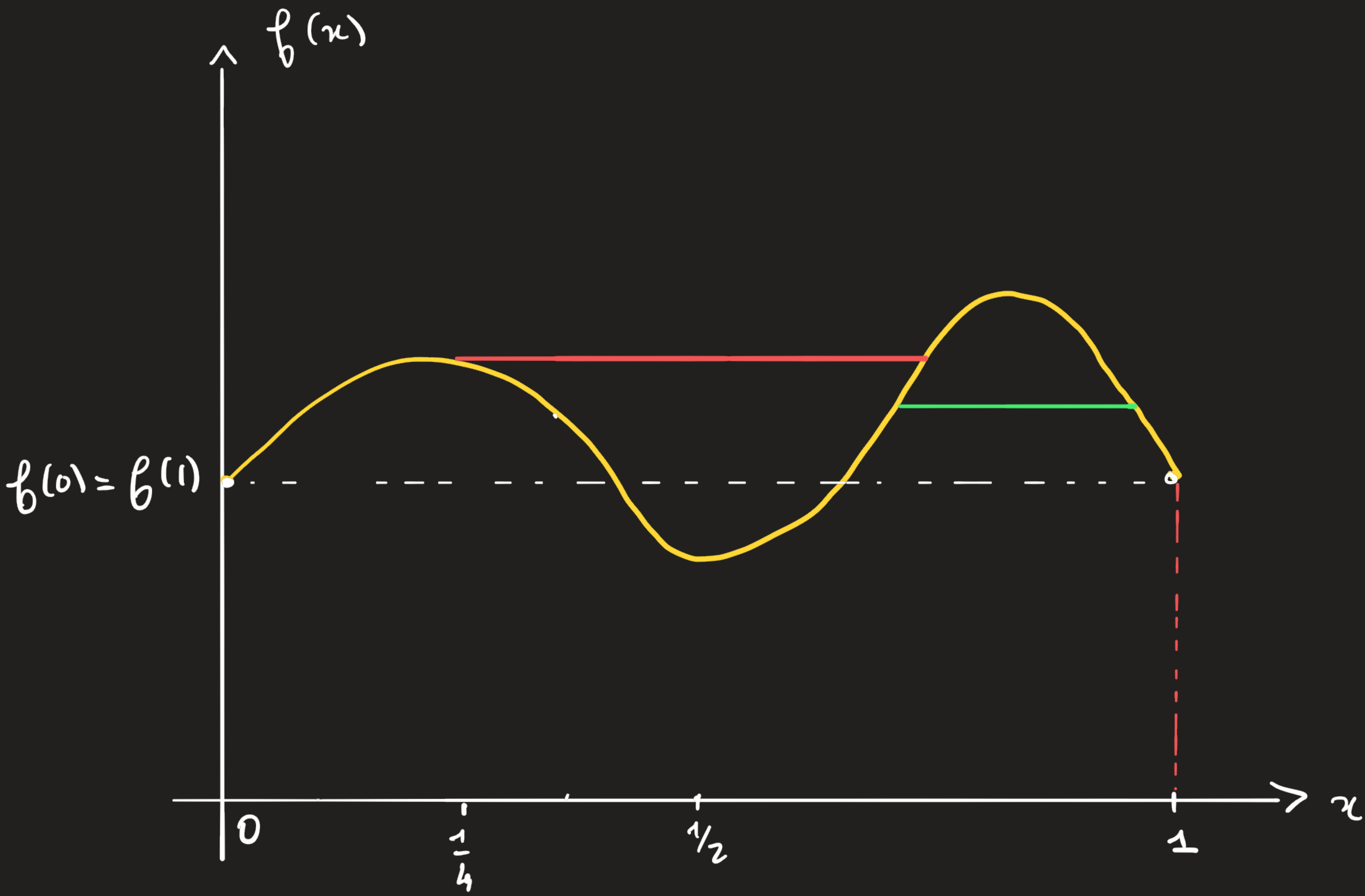
$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Si f est continue

et si $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers a

alors $\underline{a = f(a)}$

Paul Levy.



f(x)
f(0) = f(1)
0
1/4
1/2
1
x

Théorème (de la corde universelle). $n \geq 1$ $n \in \mathbb{N}$

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$f(0) = f(1)$$

Il existe $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ tel que

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x).$$

Preuve : Ecrivons

$$
\begin{aligned}
f(1) - f(0) = \; & f\left(\tfrac{1}{n}\right) - f(0) \\
& + f\left(\tfrac{2}{n}\right) - f\left(\tfrac{1}{n}\right) \\
& + f\left(\tfrac{3}{n}\right) - f\left(\tfrac{2}{3}\right) \\
& + \cdots \\
& + f\left(\tfrac{n-2}{n}\right) - f\left(\tfrac{n-3}{n}\right) \\
& + f\left(\tfrac{n-1}{n}\right) - f\left(\tfrac{n-2}{n}\right) \\
& + f(1) - f\left(\tfrac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

- S'il existe $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tel que

$$f\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = 0$$

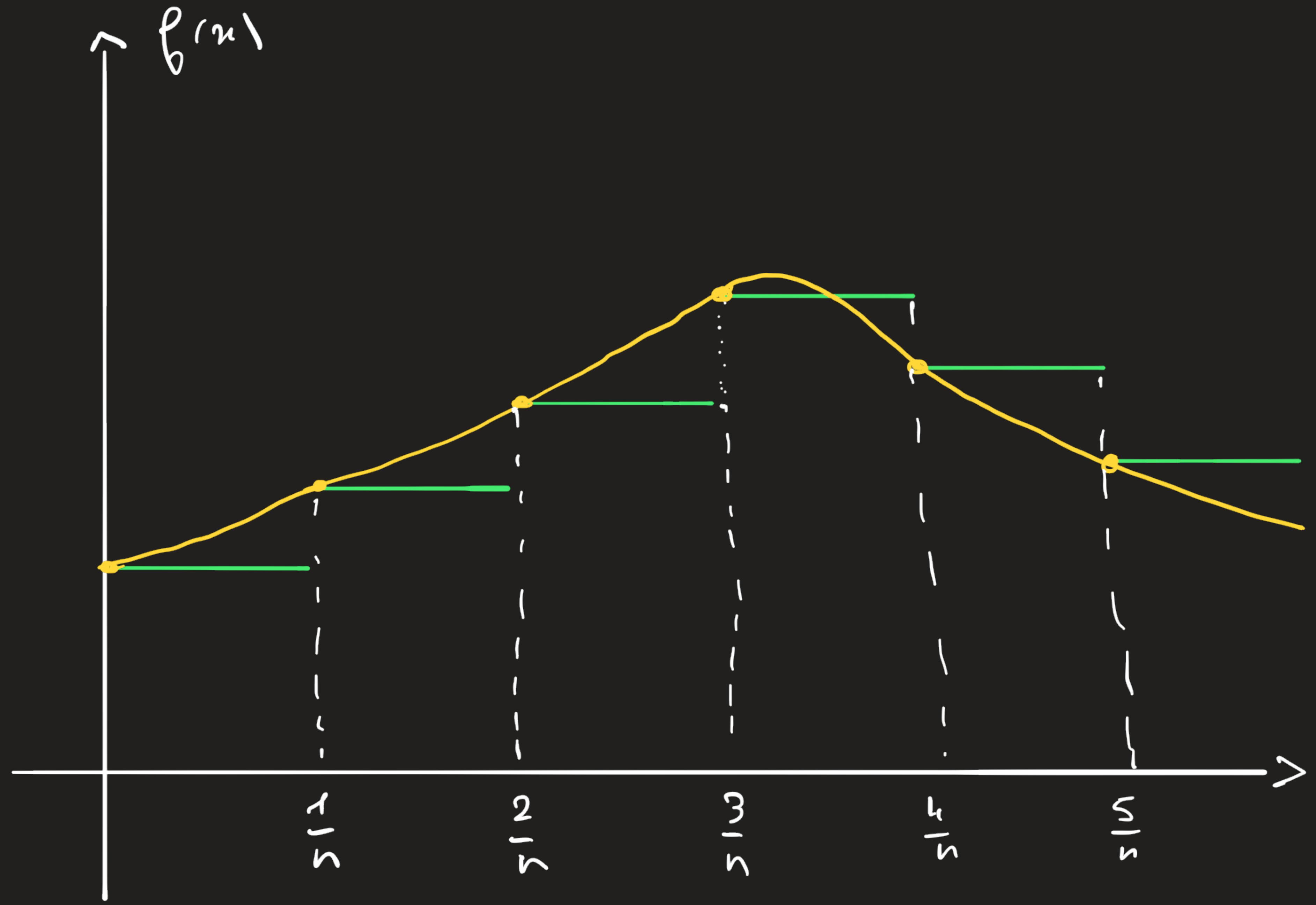
c'est terminé.

- Sinon il existe $k \neq k'$ tels que

$$f\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) > 0$$

et $$f\left(\frac{k'}{n}+\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{k'}{n}\right) < 0$$

Alors la fonction $x \longmapsto f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)$ change de signe, donc par le TVI elle s'annule entre $\frac{k}{n}$ et $\frac{k'}{n}$ $\square$


f(x)
1/n
2/n
3/n
4/n
5/n

<u>Exemple:</u> On considère $T \in]0,1]$ et

$$f(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right) - x \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right)$$

pour $x \in [0,1]$.

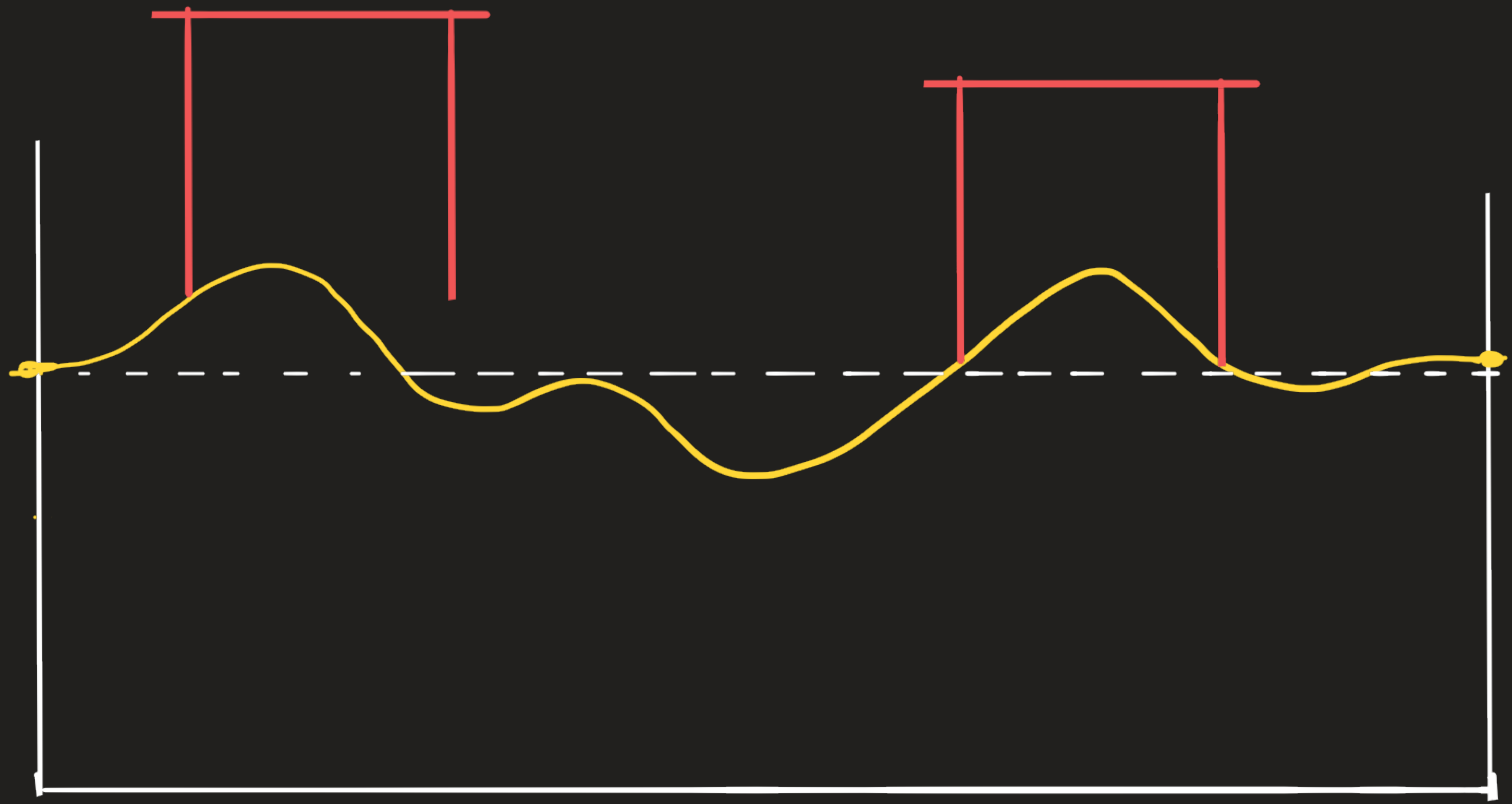
$$f(x+T) - f(x) = \underbrace{\sin^2\left(\frac{\pi x}{T} + \pi\right)}_{} - (x+T)\sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right)$$

$$- \underbrace{\sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right)}_{} + x \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right)$$

$$= -T \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right)$$

$= 0$ si et seulement si

$$\frac{1}{T} \in \mathbb{N}.$$



placer une "chaise" sur
un terrain irrégulier

Exercice Un lycéen parcourt 2000 mètres en 10 minutes.

Montrer qu'il existe un intervalle de temps de 5mn pendant lequel le lycéen a parcouru 1000 m.

<u>Exercice</u> : Un train va à une vitesse moyenne de 100 km/h. pendant un voyage qui dure $T \geq 1$ heures. Trouver T pour que l'on soit <u>certain</u> que le train a parcouru, au cours du trajet, 100 km en exactement une heure.