

L'élève qui marche.

Un élève marche sur une distance de 2000 mètres en exactement 10 minutes. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de 5 minutes pendant lequel l'élève a parcouru exactement 1000 mètres.

— Réponse —

On note $D(t)$ la distance parcourue par l'élève pendant t minutes. On suppose que la fonction $D : [0, 10] \rightarrow [0, +\infty[$ est une fonction continue. On a $D(0) = 0$ et $D(10) = 2000$.

On définit la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ par la formule

$$f(x) := D(10x) - 2000x.$$

La fonction f est bien continue et on vérifie que

$$f(0) = D(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = D(10) - 2000 = 0.$$

Le théorème de Lévy appliqué avec $n = 2$ permet de conclure qu'il existe $x \in]0, 1/2]$ tel que

$$f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x).$$

Autrement dit

$$D(10x + 5) - 2000\left(x + \frac{1}{2}\right) = D(10x) - 2000x.$$

donc, en posant $t := 10x$,

$$D(t + 5) - D(t) = 1000.$$

Le train qui roule.

Un train avance à une vitesse moyenne de 100 km/h pendant un voyage qui dure T heures. Déterminer T pour que l'on soit certain qu'au court du voyage, le train a parcouru une distance d'exactly 100 km pendant un intervalle de temps d'une durée d'une heure.

— Réponse —

On note $D(t)$ la distance, calculée en km, qui est parcourue par le train au temps t . Le temps est mesuré en heures. On suppose que la fonction $D : [0, T] \rightarrow [0, +\infty[$ est une fonction continue. On a $D(0) = 0$ et $D(T) = 100 T$.

On définit la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ par la formule

$$f(x) := D(Tx) - 100Tx.$$

La fonction f est bien continue et on vérifie que

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = D(T) - 100T = 0.$$

On suppose que $T \in \mathbf{N}$ est un entier non nul, donc $T = n \geq 1$. Alors, le théorème de Lévy appliqué à f et n , permet d'affirmer qu'il existe $x \in [0, 1 - 1/n]$ tel que

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x).$$

Autrement dit

$$D\left(Tx + \frac{T}{n}\right) - 100T\left(x + \frac{1}{n}\right) = D(Tx) - 100Tx.$$

donc, en posant $t := Tx$, que

$$D\left(t + \frac{T}{n}\right) - D(t) = 100\frac{T}{n}.$$

et, comme $T = n$, on conclut que

$$D(t+1) - D(t) = 100.$$

Conclusion : si T est un entier non nul, le train parcourt au cours du voyage, une distance d'exactly 100 km pendant un intervalle de temps d'une durée d'une heure.