

Fonction de Thomae

La fonction de Thomae $T : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, est définie de la manière suivante :

- Si $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ est un nombre irrationnel, on pose

$$T(x) := 0.$$

- Si $x \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ est un nombre rationnel non nul, on écrit

$$x = \frac{p}{q},$$

où $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ sont premiers entre eux, et on pose

$$T(x) := \frac{1}{q}.$$

- Enfin, on pose $T(0) := 1$.

(i) Montrer que tout nombre rationnel est limite d'une suite de nombres irrationnels. Indication : utiliser par exemple, le fait que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

(ii) Soit $r \in \mathbf{Q}$ un nombre rationnel. Montrer que la fonction de Thomae n'est pas continue en x .

(iii) Montrer que tout nombre irrationnel est limite d'une suite de nombres rationnels. Indication : construire une telle suite

(iv) Soit $(p_n)_{n \geq 0}$ une suite d'entiers relatifs. On suppose que la suite $(p_n)_{n \geq 0}$ converge vers une limite notée y . Montrer que $y \in \mathbf{Z}$. Indication : on peut, par exemple, raisonner par l'absurde.

(v) Soit $(r_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres rationnels qui converge vers un nombre $x \in \mathbf{R}$. On écrit

$$r_n = \frac{p_n}{q_n},$$

où $p_n \in \mathbf{Z}$ et $q_n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et on suppose que la suite $(q_n)_{n \geq 0}$ est bornée. Montrer que x est nécessairement un nombre rationnel. Indication : on pourra commencer par montrer que la suite $(q_n)_{n \geq 0}$ prend une infinité de fois la même valeur.

(vi) Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ un nombre irrationnel. Montrer que la fonction de Thomae est continue en x .