

## Fonction de Thomae

La fonction de Thomae  $T : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , est définie de la manière suivante :

- Si  $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  est un nombre irrationnel, on pose

$$T(x) := 0.$$

- Si  $x \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$  est un nombre rationnel non nul, on écrit

$$x = \frac{p}{q},$$

où  $p \in \mathbf{Z}$  et  $q \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  sont premiers entre eux, et on pose

$$T(x) := \frac{1}{q}.$$

- Enfin, on pose  $T(0) := 1$ .

(i) Montrer que tout nombre rationnel est limite d'une suite de nombres irrationnels.  
Indication : utiliser par exemple, le fait que  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre rationnel.

— Réponse —

Soit  $r \in \mathbf{Q}$  un nombre rationnel. Considérons la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  définie par

$$x_n = r + \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

La suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $r$  et chaque  $x_n$  est un nombre irrationnel car  $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ .

(ii) Soit  $r \in \mathbf{Q}$  un nombre rationnel. Montrer que la fonction de Thomae n'est pas continue en  $x$ .

— Réponse —

Si  $r \in \mathbf{Q}$  est un nombre rationnel alors  $T(r) > 0$ . D'après la question précédente il existe une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  qui converge vers  $r$  et  $T(x_n) = 0$  puisque  $x_n \notin \mathbf{Q}$ . Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_n) = 0 \neq T(r),$$

ce qui montre que  $T$  n'est pas continue en  $r$ .

(iii) Montrer que tout nombre irrationnel est limite d'une suite de nombres rationnels. Indication : construire une telle suite

— Réponse —

Soit  $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  un nombre irrationnel. Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on note

$$x_n := \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}.$$

Clairement,  $x_n \in \mathbf{Q}$ . On peut écrire

$$x - x_n = \frac{10^n x - \lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$$

Par définition de la partie entière d'un nombre on a

$$0 \leq 10^n x - \lfloor 10^n x \rfloor < 1,$$

donc

$$0 \leq x - x_n < \frac{1}{10^n}$$

ce qui montre que la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $x$ .

(iv) Soit  $(p_n)_{n \geq 0}$  une suite d'entiers relatifs. On suppose que la suite  $(p_n)_{n \geq 0}$  converge vers une limite notée  $y$ . Montrer que  $y \in \mathbf{Z}$ . Indication : on peut, par exemple, raisonner par l'absurde.

— Réponse —

Si la suite  $(p_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $p$ , alors la suite  $(p_{n+1} - p_n)_{n \geq 0}$  tend vers 0. Par conséquent,  $|p_{n+1} - p_n| < 1$  pour tout  $n$  assez grand. Comme  $p_{n+1} - p_n \in \mathbf{Z}$ , on en déduit que  $p_{n+1} = p_n$  pour tout les indices  $n$  assez grands. Conclusion, la suite  $(p_n)_{n \geq 0}$  est une suite constante à partir d'un certain indice et, comme les  $p_n$  sont des entiers, elle converge donc vers un entier.

(v) Soit  $(r_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres rationnels qui converge vers un nombre  $x \in \mathbf{R}$ . On écrit

$$r_n = \frac{p_n}{q_n},$$

où  $p_n \in \mathbf{Z}$  et  $q_n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  et on suppose que la suite  $(q_n)_{n \geq 0}$  est bornée. Montrer que  $x$  est nécessairement un nombre rationnel. Indication : on pourra commencer par montrer que la suite  $(q_n)_{n \geq 0}$  prend une infinité de fois la même valeur.

— Réponse —

Si la suite  $(q_n)_{n \geq 0}$  est bornée, cela implique (principe des tiroirs) que la suite prend une infinité de fois une même valeur, notée  $q$ . Donc on a une sous-suite de la suite  $(q_n)_{n \geq 0}$  qui est constante égale à  $q$ . La sous-suite de  $(p_n)_{n \geq 0}$  correspondante converge donc vers  $q r$  et, d'après la question précédente, cette sous-suite de  $(p_n)_{n \geq 0}$  est constante à partir d'un certain indice. Ceci permet de conclure qu'une sous-suite de  $(r_n)_{n \geq 0}$  est constante à partir d'un certain indice et par conséquent elle converge vers un nombre rationnel.

(vi) Soit  $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  un nombre irrationnel. Montrer que la fonction de Thomae est continue en  $x$ .

— Réponse —

Soit  $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ , alors  $T(x) = 0$ . Si  $(x_n)_{n \geq 0}$  est une suite de nombres irrationnels qui converge vers  $x$ , on a  $T(x_n) = 0$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_n) = 0 = T(x).$$

Si  $(x_n)_{n \geq 0}$  est une suite de nombre rationnels qui converge vers  $x$ , on écrit

$$x_n = \frac{p_n}{q_n},$$

où  $p_n \in \mathbf{Z}$  et  $q_n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  sont premiers entre eux. La question précédente nous permet d'affirmer que la suite  $(q_n)_{n \geq 0}$  n'est pas bornée et on vérifie qu'elle tend vers l'infini (remarquer que d'après la question précédente, la suite  $(q_n)_{n \geq 0}$  ne contient aucune sous-suite bornée). Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{q_n} = 0.$$

On peut alors déduire de ces remarques que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_n) = 0 = T(x).$$

pour toute suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  qui converge vers  $x$  et ceci montre que la fonction de Thomae est continue en  $x$ .